

Serie 9

1. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y , welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die Verteilung von (X, Y) sollen folgende Bedingungen gelten:

$$P[X = 0] = 1/2, \quad P[Y = 0] = 1/3 \quad \text{und} \quad P[X = 0, Y = 0] = p.$$

- a) Welche Werte darf p annehmen und für welche Werte von p sind X und Y unabhängig?
- b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E[X]$, $E[Y]$ und $E[XY]$ sowie die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 als Funktion von p . Wann gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$?
- c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen U und V so, dass $E[UV] = E[U]E[V]$ aber mit U und V nicht unabhängig.
2. a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j}$, wobei $m, n, k \geq 1$.

HINWEIS: Benützen Sie die Identität $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Seien X und Y zwei binomial verteilte Zufallsvariablen mit Parametern (m, p) bzw. (n, p) .

- b) Angenommen X und Y sind unabhängig, was ist die Verteilung von $X + Y$?

Wir betrachten eine Urne mit 5 schwarzen und 5 weissen Kugeln. Wir ziehen $n \geq 1$ Kugeln mit Zurücklegen. Sei X' die Anzahl weisser Kugeln, welche gezogen wurden, und sei Y' die Anzahl schwarzer Kugeln, welche gezogen wurden.

- c) Was sind die Verteilungen von X' , Y' und $X' + Y'$? Widerspricht dies dem Resultat aus b)?
3. Ein Fabrikant verwendet Komponenten A, B, C um Chips herzustellen. Ein Chip wird aus einer Komponente A und einer Komponente B oder aus einer Komponente A und einer Komponente C hergestellt. Beide Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. Die Komponenten A, B, C haben respektiv X , Y , Z Fehlerstellen. Wir nehmen an, dass X , Y , Z unabhängig und Poisson verteilt sind mit respektiven Parametern λ , μ und 2μ . Sei N die Anzahl Fehlerstellen in einem Chip.

- a) Berechnen Sie explizit die Verteilungen von $X + Y$ und $X + Z$.

Bitte wenden!

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip die Komponente B enthält, falls $N = n$, für $n \geq 0$.
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert von N .

Abgabe: Am Montag 22. Mai in der Übungsstunde.